Vektoranalysis

Gradient und Richtungsableitung

Richtungsableitung

Woher kommt die Formel?

Für die Richtungsableitung gilt: $\partial_{\vec{v}} f(\vec{p}) = \vec{v}_0 \cdot \nabla f(\vec{p})$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Richtungsableitung

Woher kommt die Formel?

Für die Richtungsableitung gilt: $\partial_{\vec{v}} f(\vec{p}) = \vec{v}_0 \cdot \nabla f(\vec{p})$

Wir betrachten die Definition der partiellen Ableitung…

$$\partial_{x_1} f(p) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(p_1 + \Delta x_1, p_2) - f(p_1, p_2)}{\Delta x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{e}_1) - f(\vec{p})}{h}$$

$$\partial_{x_2} f(p) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(p_1, p_2 + \Delta x_2) - f(p_1, p_2)}{\Delta x_2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{e}_2) - f(\vec{p})}{h}$$

Richtungsableitung

Woher kommt die Formel?

Für die Richtungsableitung gilt: $\partial_{\vec{v}} f(\vec{p}) = \vec{v}_0 \cdot \nabla f(\vec{p})$

Wir betrachten die Definition der partiellen Ableitung…

$$\partial_{x_1} f(p) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(p_1 + \Delta x_1, p_2) - f(p_1, p_2)}{\Delta x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{e}_1) - f(\vec{p})}{h}$$

$$\partial_{x_2} f(p) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(p_1, p_2 + \Delta x_2) - f(p_1, p_2)}{\Delta x_2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{e}_2) - f(\vec{p})}{h}$$

Warum?

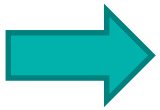
$$\vec{p} + h \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + h \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Woher kommt die Formel?

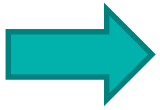
Wir betrachten die Ausdrücke genauer…

$$\partial_{x_1} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{e}_1) - f(\vec{p})}{h}$$



Steigung in $\vec{e}_1$ Richtung

$$\partial_{x_2} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{e}_2) - f(\vec{p})}{h}$$



Steigung in $\vec{e}_2$ Richtung

Richtungsableitung

Woher kommt die Formel?

Wir betrachten die Ausdrücke genauer…

$$\partial_{x_1} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{e}_1) - f(\vec{p})}{h}$$ ⇒ Steigung in $\vec{e}_1$ Richtung

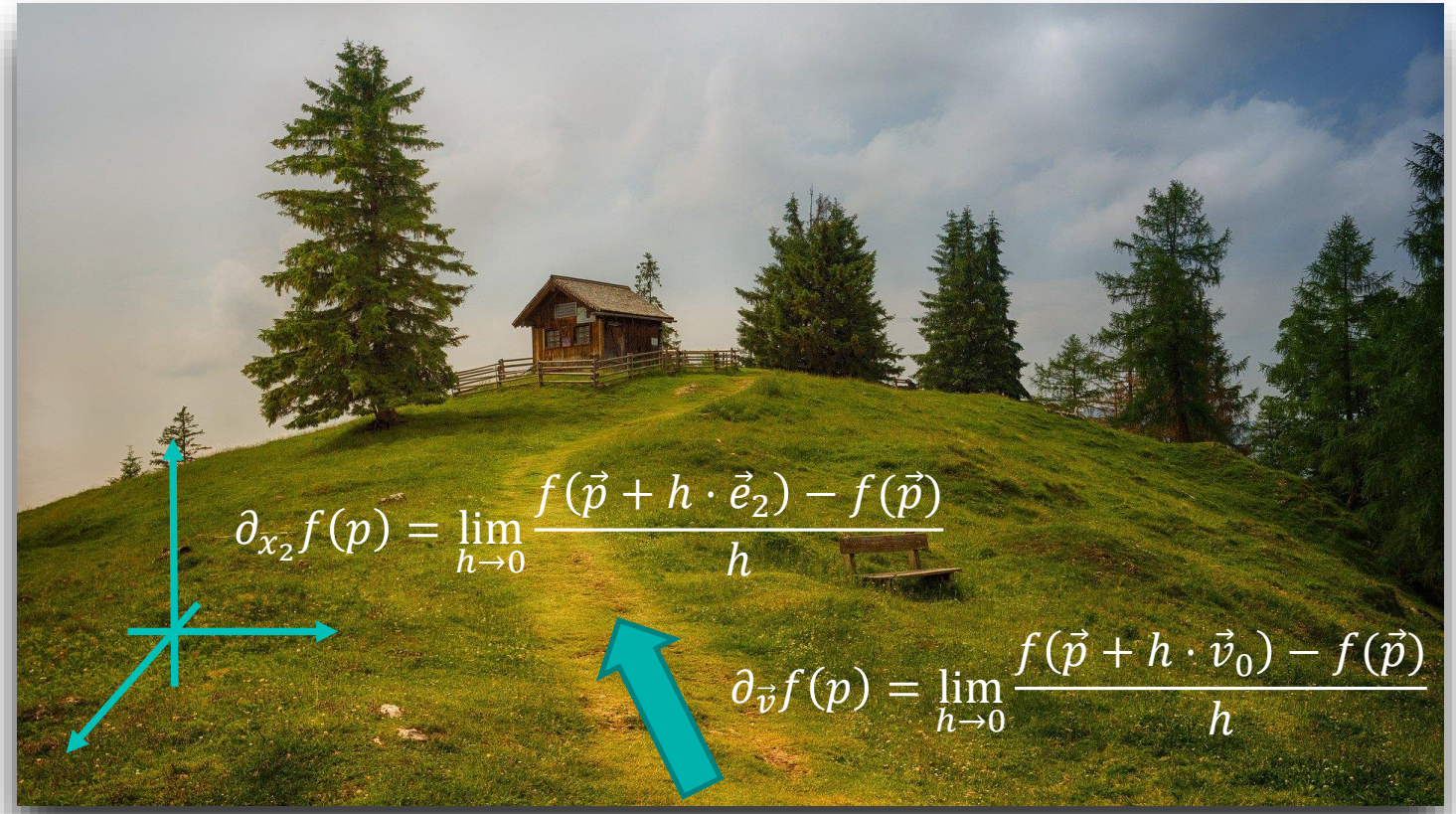
$$\partial_{x_2} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{e}_2) - f(\vec{p})}{h}$$ ⇒ Steigung in $\vec{e}_2$ Richtung

Jetzt suchen wir die Steigung in $\vec{v}$ Richtung und verwenden den auf eins normierten Vektor $\vec{v}_0$…

⇒ $$\partial_{\vec{v}} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0) - f(\vec{p})}{h}$$

Richtungsableitung

Woher kommt die Formel?



Richtungsableitung

Woher kommt die Formel?

Wir haben also folgende Formel für die Richtungsableitung gefunden:

$$\partial_{\vec{v}} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0) - f(\vec{p})}{h}$$

Woher kommt die Formel?

Wir haben also folgende Formel für die Richtungsableitung gefunden:

$$\partial_{\vec{v}} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0) - f(\vec{p})}{h}$$

Uns stört der Grenzwert, d.h. wir wollen eine Formel ohne Grenzwert…



Wir rechnen den Grenzwert aus…

Richtungsableitung

$$\partial_{\vec{v}} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0) - f(\vec{p})}{h}$$

Woher kommt die Formel?

Wir beginnen mit einer Taylorentwicklung:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{p}) + \nabla f(\vec{p})^{T} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) + r(\vec{x} - \vec{p})$$

Nur eine Approximation, d.h. nicht exakt, also gilt das Gleichheitszeichen nicht!

Approximationsfehler

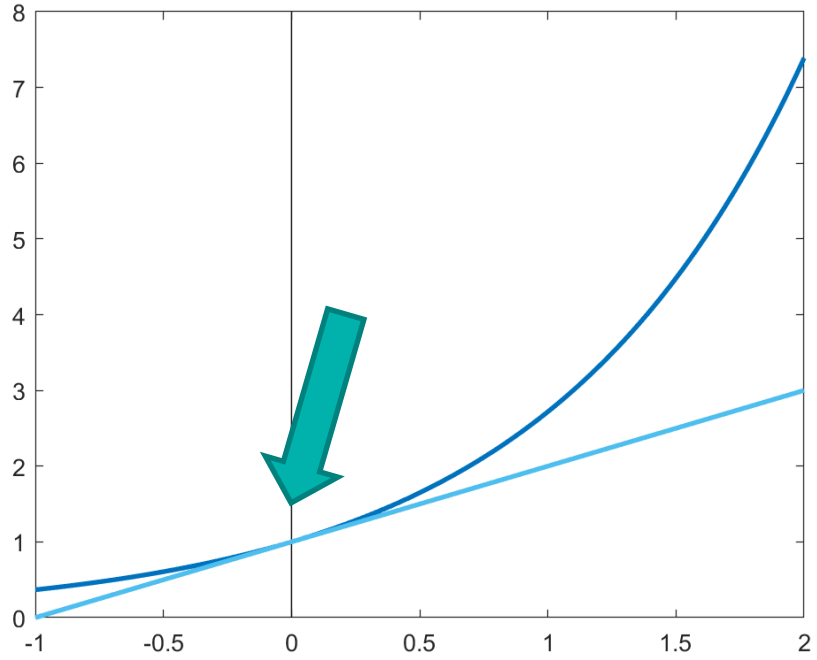
Der Fehler ist nicht „beliebig", er erfüllt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h \cdot \vec{v})}{h} = 0$$

Der Fehler geht gegen null, wenn wir gegen $\vec{p}$ laufen und zwar sehr schnell…

Woher kommt die Formel?

Veranschaulichung…



Wenn wir mit $\vec{x}$ auf der Tangenten gegen $\vec{p}$ laufen, stimmen Tangente und Funktion immer besser überein.

Dann muss aber der Fehler gegen Null gehen…

$$f(\vec{x}) = f(\vec{p}) + \nabla f(\vec{p})^{T} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) + r(\vec{x} - \vec{p})$$

Funktion | Tangente | Fehler

Richtungsableitung

Woher kommt die Formel?

Zurück zur Formel…

$$\partial_{\vec{v}} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0) - f(\vec{p})}{h}$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Vektoranalysis

Richtungsableitung

Woher kommt die Formel?

Zurück zur Formel…

$$\partial_{\vec{v}} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0) - f(\vec{p})}{h}$$

Wir betrachten den Zähler und wenden unsere Taylorformel an…

$$f(\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0) - f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p})^T \cdot (\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0 - \vec{p}) + r(\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0 - \vec{p})$$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{p}) + \nabla f(\vec{p})^T \cdot (\vec{x} - \vec{p}) + r(\vec{x} - \vec{p})$$

$\vec{x} = \vec{p} + h \cdot \vec{v}_0$ $\quad$ $\vec{x} = \vec{p} + h \cdot \vec{v}_0$ $\quad$ $\vec{x} = \vec{p} + h \cdot \vec{v}_0$

Woher kommt die Formel?

Zurück zur Formel…

$$\partial_{\vec{v}} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0) - f(\vec{p})}{h}$$

Was haben wir bisher?

$$f(\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0) - f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p})^T \cdot (h \cdot \vec{v}_0) + r(h \cdot \vec{v}_0)$$

Wir teilen durch h…

$$\frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0) - f(\vec{p})}{h} = \frac{\nabla f(\vec{p})^T \cdot (h \cdot \vec{v}_0)}{h} + \frac{r(h \cdot \vec{v}_0)}{h}$$

Und bilden den Grenzwert…

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h \cdot \vec{v}_0) - f(\vec{p})}{h} = \lim_{h \to 0} \nabla f(\vec{p})^T \cdot \vec{v}_0 + \lim_{h \to 0} \frac{r(h \cdot \vec{v}_0)}{h}$$

$$= \partial_{\vec{v}} f(p)$$

Woher kommt die Formel?

Wir haben also gezeigt, dass folgende Formel gilt…

$$\partial_{\vec{v}} f(p) = \nabla f(\vec{p})^{T} \cdot \vec{v}_0$$

Noch nicht ganz formal geklärt wurde, warum die folgende Approximation gilt:

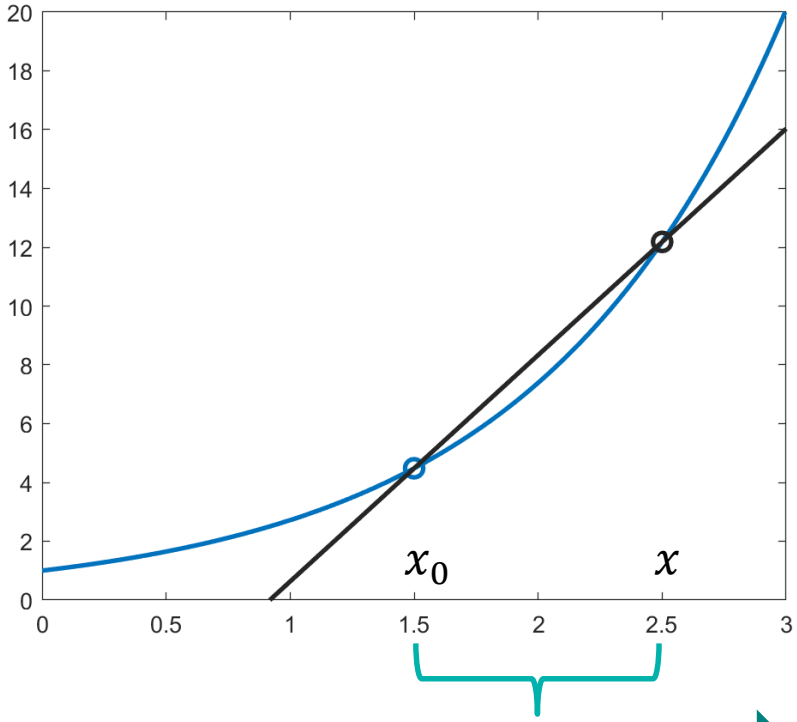
$$f(\vec{x}) = f(\vec{p}) + \nabla f(\vec{p})^{T} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) + r(\vec{x} - \vec{p})$$

Wobei gilt: $\lim_{h \to 0} \frac{r(h \cdot \vec{v})}{h} = 0$

Totale Ableitung von Skalarfeldern

Wir betrachten die 1d Ableitung...

Wir haben die Ableitung wie folgt definiert:



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Es gibt noch eine weitere mögliche Definition…

$$x = x_0 + h$$

Totale Ableitung von Skalarfeldern

Satz:

Es sei I ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:

f ist genau dann differenzierbar an der Stelle x, wenn eine Zahl $d \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$f(x+h) - f(x) = d \cdot h + r(h) \qquad \text{mit} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

gilt. In diesem Fall ist $d = f'(x)$.

Warum definiert das die Ableitung?

Totale Ableitung von Skalarfeldern

Warum definiert der Satz die Ableitung?

Wir betrachten eine Funktion für die Folgendes gilt:

$$f(x+h) - f(x) = d \cdot h + r(h) \qquad \text{mit} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Totale Ableitung von Skalarfeldern

Warum definiert der Satz die Ableitung?

Wir betrachten eine Funktion für die Folgendes gilt:

$$f(x+h) - f(x) = d \cdot h + r(h) \qquad \text{mit} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Wir formen um und teilen durch h…

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = d + \frac{r(h)}{h}$$

Totale Ableitung von Skalarfeldern

Warum definiert der Satz die Ableitung?

Wir betrachten eine Funktion für die Folgendes gilt:

$$f(x+h) - f(x) = d \cdot h + r(h) \qquad \text{mit} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Wir formen um und teilen durch h…

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = d + \frac{r(h)}{h}$$

Grenzwert auf der rechten Seite existiert

Wir bilden den Grenzwert $h \to 0$…

$$\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{= f'(x)} = \underbrace{\lim_{h \to 0} d + \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h}}_{= d}$$

Grenzwert auf der linken Seite existiert

Totale Ableitung von Skalarfeldern

Warum definiert der Satz die Ableitung?

Wir nehmen an, dass f differenzierbar ist…

Wir betrachten die Formel mit $d = f'(x)$…

$$f(x+h) - f(x) = d \cdot h + r(h) \quad \Rightarrow \quad f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + r(h)$$

Wir formen um:

$$\Rightarrow \quad \frac{r(h)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

Wir bilden den Grenzwert:

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h}}_{= 0} = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{= 0} - f'(x)$$

Totale Ableitung von Skalarfeldern

Zurück zu den Skalarfeldern…

Wir hatten den folgenden Ausdruck verwendet…

$$f(\vec{x}) = f(\vec{p}) + \nabla f(\vec{p})^{T} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) + r(\vec{x} - \vec{p})$$

wobei gilt: $$\lim_{h \to 0} \frac{r(h \cdot \vec{v})}{h} = 0$$

Vektoranalysis

Totale Ableitung von Skalarfeldern

Zurück zu den Skalarfeldern…

Wir hatten den folgenden Ausdruck verwendet…

$$f(\vec{x}) = f(\vec{p}) + \nabla f(\vec{p})^T \cdot \underbrace{(\vec{x} - \vec{p})}_{= h} + r(\vec{x} - \vec{p})$$

wobei gilt: $\lim_{h \to 0} \frac{r(h \cdot \vec{v})}{h} = 0$

Das erinnert doch stark an die Formel aus dem Satz…

$$f(x + h) - f(x) = d \cdot h + r(h) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

$$= f'(x)$$

Vektoranalysis

Totale Ableitung von Skalarfeldern

Definition totale Ableitung

Ein Skalarfeld $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt im Punkt $\vec{p}$ total differenzierbar, wenn folgende Darstellung existiert:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{p}) + \nabla f(\vec{p})^T \cdot (\vec{x} - \vec{p}) + r(\vec{x} - \vec{p})$$

wobei gilt: $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{p}} \frac{|r(\vec{x}-\vec{p})|}{|\vec{x}-\vec{p}|} = 0$

Betrag der Vektoren

Der Gradient wird auch als totale Ableitung bezeichnet

Totale Ableitung von Skalarfeldern

Eigenschaften

Ist ein Skalarfeld total differenzierbar, so existieren die einzelnen partiellen Ableitungen. Diese bilden dann den Gradienten, der die total Ableitung des Skalarfeldes ist.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Totale Ableitung von Skalarfeldern

Eigenschaften

Ist ein Skalarfeld total differenzierbar, so existieren die einzelnen partiellen Ableitungen. Diese bilden dann den Gradienten, der die total Ableitung des Skalarfeldes ist.

Aus der Existenz der einzelnen partiellen Ableitungen können wir nicht folgen, dass die Funktion total differenzierbar ist, d.h. dass der Gradient existiert. So gesehen war unser bisherige Definition etwas ungenau.

Totale Ableitung von Skalarfeldern

Eigenschaften

Ist ein Skalarfeld total differenzierbar, so existieren die einzelnen partiellen Ableitungen. Diese bilden dann den Gradienten, der die total Ableitung des Skalarfeldes ist.

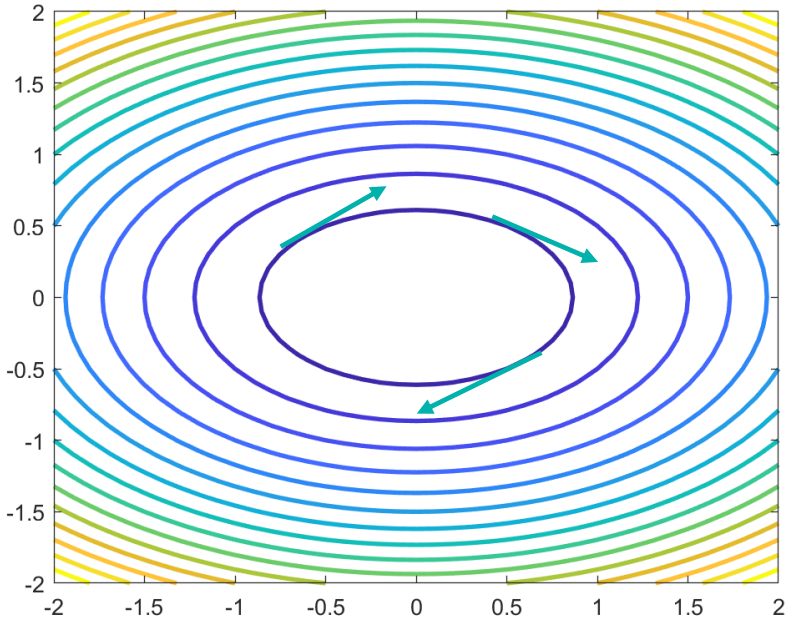
Aus der Existenz der einzelnen partiellen Ableitungen können wir nicht folgen, dass die Funktion total differenzierbar ist, d.h. dass der Gradient existiert. So gesehen war unser bisherige Definition etwas ungenau.

Wenn bei einem Skalarfeld alle partiellen Ableitungen existieren und zusätzlich stetig sind, dann ist das Skalarfeld total differenzierbar und der Gradient existiert. So gesehen, passte unsere Definition doch, da wir es i.d.R. mit stetigen partiellen Ableitungen zu tun hatten.

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Eigenschaften des Gradienten

Senkrecht zu den Höhenlinien



Entlang der Höhenlinien ändert sich die Funktion nicht

Die Richtungsableitung in diese Richtung verschwindet

$$\vec{v} \cdot \nabla f(\vec{x}) = 0$$

Der Gradient steht senkrecht auf den Höhenlinien

Eigenschaften des Gradienten

In welche Richtung zeigt der Gradient?

Der Gradient zeigt in Richtung „Anstieg“, d.h. von unten nach oben…

Können wir genauere Aussagen machen?

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Eigenschaften des Gradienten

In welche Richtung zeigt der Gradient?

Der Gradient zeigt in Richtung „Anstieg", d.h. von unten nach oben…

Können wir genauere Aussagen machen?

Wir betrachten den Betrag der Richtungsableitung…

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_0}\right| = |\vec{v}_0 \cdot \nabla f| \leq \underbrace{|\vec{v}_0|}_{=1} \cdot |\nabla f| = |\nabla f|$$

$$\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \underbrace{|\cos\alpha|}_{\leq 1}$$

Eigenschaften des Gradienten

In welche Richtung zeigt der Gradient?

Der Gradient zeigt in Richtung „Anstieg", d.h. von unten nach oben…

Können wir genauere Aussagen machen?

Wir betrachten den Betrag der Richtungsableitung… $\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_0}\right| \leq |\nabla f|$

Wir betrachten die Richtungsableitung in Richtung des Gradienten… $\vec{v}_0 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_0} = \frac{\nabla f \cdot \nabla f}{|\nabla f|} = \frac{|\nabla f|^2}{|\nabla f|} = |\nabla f|$$

Es gilt: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Eigenschaften des Gradienten

In welche Richtung zeigt der Gradient?

Was haben wir herausgefunden?

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Eigenschaften des Gradienten

In welche Richtung zeigt der Gradient?

Was haben wir herausgefunden?

Für den Betrag der Richtungsableitung gilt: $$\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_0}\right| \leq |\nabla f|$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Eigenschaften des Gradienten

In welche Richtung zeigt der Gradient?

Was haben wir herausgefunden?

Für den Betrag der Richtungsableitung gilt: $$\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_0}\right| \leq |\nabla f|$$

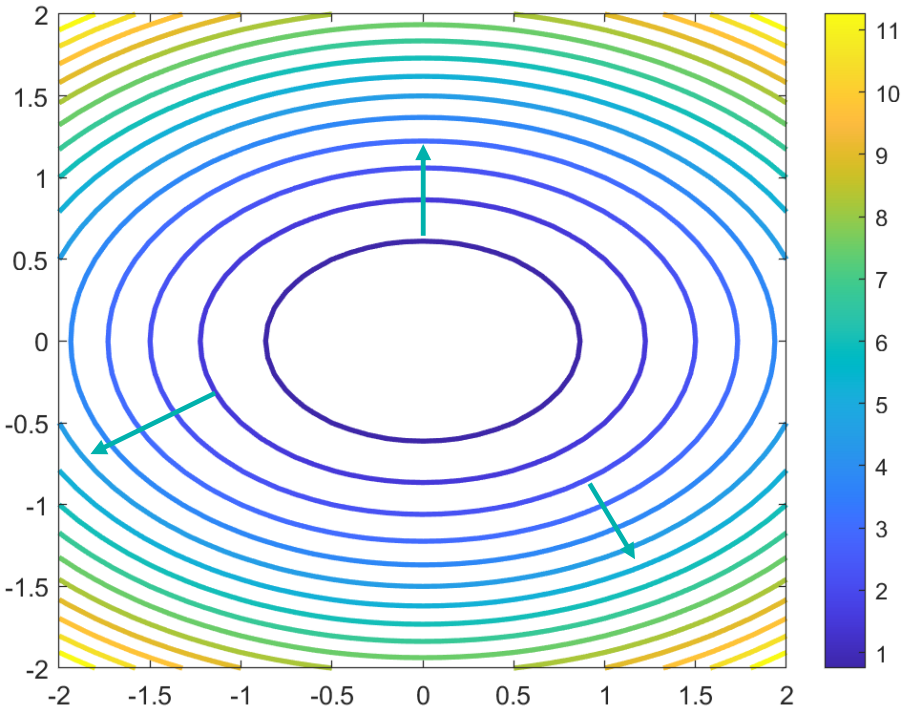
Bestimmen wir die Richtungsableitung in Gradienten-Richtung, so wird dieser maximale Wert angenommen…

- Unter allen Richtungsableitungen ist die in Richtung des Gradienten am größten
- Die größte Richtungsableitung bedeutet den größten Funktionsanstieg
- Der Gradient zeigt immer in Richtung des größten Funktionsanstieges

Vektoranalysis

Eigenschaften des Gradienten

Beispiel

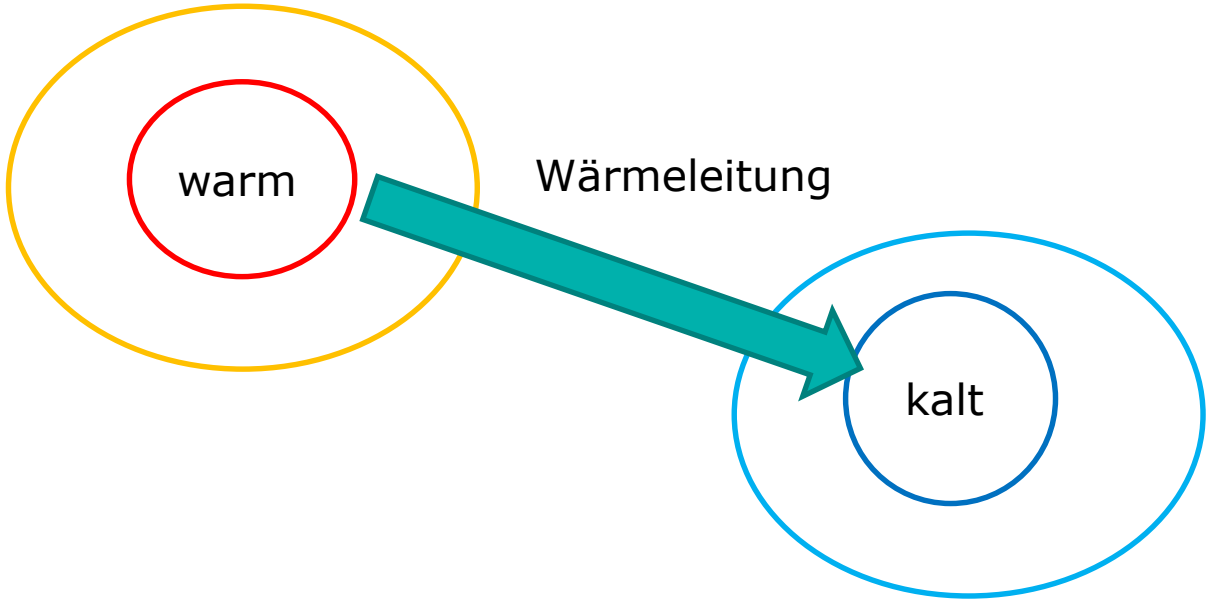


Steigt nach außen

Eigenschaften des Gradienten

Anwendnungsbeispiel: Temperaturgradient und Wärmestromdichte

Wir betrachten eine Temperaturverteilung $T(x, y)$



Wie stark ist die Wärmeleitung?

Wärmestromdichte: $\vec{\dot{q}} = -\lambda \cdot \nabla T$